Scan to know paper details and author's profile

The Bianchi Transform of the Minding Coil

Cheshkova Mira

ABSTRACT

The work is devoted to the study of the Bianchi transform for surfaces of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Mining top, the Minding coil, the pseudosphere (Beltrami surface). Surfaces of constant negative Gaussian curvature also include Kuens surface and the Dinis surface. The study of surfaces of constant negative Gaussian curvature (pseudospherical surfaces) is of great importance for the interpretation of Lobachevsky planimetry. The connection of the geometric characteristics of pseudospherical surfaces with the theory of networks, with the theory of solitons, with nonlinear differential equations and sin-Gordon equations is established. The sin - Gordon equation plays an important role in modern physics. Bianchi transformations make it possible to obtain new pseudospherical surfaces from a given pseudospherical surface.

Keywords: gaussian curvature, surface of rotation, the minding coil,bianchi transformations.

Classification: LCC Code: QC261, QA649

Language: English

Great Britain Journals Press

LJP Copyright ID: 573355
Print ISSN: 2515-5786
Online ISSN: 2515-5792

London Journal of Research in Humanities and Social Sciences

Volume 23 | Issue 20 | Compilation 1.0

The Bianchi Transform of the Minding Coil

Преобразование Бианки катушки Миндинга

Cheshkova Mira

ABSTRACT

The work is devoted to the study of the Bianchi transform for surfaces of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Mining top, the Minding coil, the pseudosphere (Beltrami surface). Surfaces of constant negative Gaussian curvature also include Kuens surface and the Dinis surface. The study of surfaces of constant negative Gaussian curvature (pseudospherical surfaces) is of great importance for the interpretation of Lobachevsky planimetry. The connection of the geometric characteristics of pseudospherical surfaces with the theory of networks, with the theory of solitons, with nonlinear differential equations and sin-Gordon equations is established. The sin -Gordon equation plays an important role in modern physics. Bianchi transformations make it possible to obtain new pseudospherical surfaces from a given pseudospherical surface.

Using a mathematical package, the Bianchi transform for the Minding coil is constructed.

Keywords: gaussian curvature, surface of rotation, the minding coil,bianchi transformations.

АБСТРАКТНЫЙ

Работа посвящена изучению преобразования Бианки для поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера (поверхность Бельтрами). Изучение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны (псевдосферических поверхностей) имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с теорией сетей, с теорией солитонов, с нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями синус-Гордона. Уравнение sin-Гордона играет важную роль в современной физике. Преобразования Бианки позволяют по данной псевдосферической поверхности получить новые псевдосферические поверхности.

Используя математический пакет, строятся псевдосфера и ее преобразования Бианки.

Ключевые слова: гауссова кривизна, поверхность вращения, катушка миндинга, преобразование бианки.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси. Обозначим через $k = (0, 0, 1)$— орт оси, а через $e(v) = (\cos cos\, (v)\, , \sin sin\, (v)\, , 0)$— радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность M можно задать в виде:

$$r = ue(v) + f(u)k \tag{1}$$

где f — дифференцируемая функция, u, v— параметры.

Обозначим через n — орт нормали к поверхности M. Тогда

$$n = \frac{f'e-k}{\sqrt{(f')^2+1}} \quad . \tag{2}$$

Главные кривизны k_1 k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2+1}}, \; k_2 = -\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2+1}\right)^3}$$

Гауссова кривизна $K=k_1k_2$ равна

$$K = \frac{f'}{u\sqrt{(f')^2+1}} \frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2+1}\right)^3}$$

Требуем $K = const$, получим решение

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{Ku^2-(c-1)}{c-Ku^2}}du, \tag{3}$$

где c — произвольная константа.

Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга $0 < c < 1$, катушка Миндинга $c < 0$, псевдосфера $c = 0$ [1, с.100], [2, с.175].

Для K=-1, следуя Миндингу, $c=-a^2$, $u=ach(t)$, $a=1$.

Из (3) имеем

$f(u) = \int \sqrt{1-sh(t)^2}\,dt$, $f(t)= 2(EllipticF(sh(t),i)-EllipticE(sh(t),i))+C$, $C=const$,

где *EllipticF(sh(t),i)*, *EllipticE(sh(t),i)* - эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно.

Предположим $C=0$, тогда

$f(t)= 2(EllipticF(sh(t),i)-EllipticE(sh(t),i))$.

Так как $1-sh^2(t) \neq 0$, имеем $t \in [-\ln(1+\sqrt{2}), \ln(1+\sqrt{2})]$.

Построим катушку Миндинга

M: $r(t,v)=ch(t)e(v)+f(t)k$, $t\in [-\ln(1+\sqrt{2}), \ln(1+\sqrt{2})]$, $v \in [-\pi, \pi]$.

Положим $m=f(\ln(1+\sqrt{2}))$ и определим еще две секции катушки Миндинга

M1: $r(t,v)=ch(t)e(v)+(f(t)+2m)k$,

M2: $r(t,v)=ch(t)e(v)+(f(t)+4m)k$.

Построим три секции катушки Миндинга (рис. 1).

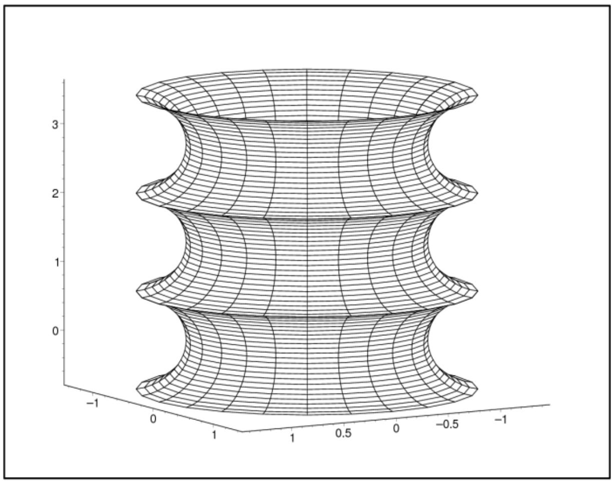

Рис.1: Три секции катушки Миндинга

Определим метрический тензор g_{ij} и символы Кристоффеля Γ_k^{ij}.
Имеем

$$r_1 = r_u = e(v) + \sqrt{1 - sh(t)^2}k, r_2 = r_v = ue'(v),$$

$$g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = ch(t)^2, \tag{4}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -sh(t)ch(t), \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = th(t).$$

Остальные Γ_k^{ij} равны нулю.

Рассмотрим две гладкие поверхности $M, \overline{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M, f(p) \in \overline{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем вектор $\overrightarrow{pf}(p) = \rho V_p$ где V_p — орт, $\rho = const$. Обозначим через n — орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности $\overline{M}$ в точке $f(p) \in \overline{M}$ имеет вид $T_{f(p)}\overline{M} = \{f(p), n.V\}$. Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2}$, то и поверхность $\overline{M}$ имеет ту же кривизну.

Обозначим через r радиус-вектор поверхности M, а через R — радиус-вектор поверхности $\overline{M}$. Полагаем $K = -1$ и рассмотрим отображение $f : M \to \overline{M}$ [2, с. 489].

Имеем

$$R = r - V, V = V^s r_s.$$

Из условия $< R_i [n, V] >= 0$ получим

$$r_i - \partial_i V = \omega(r_i) V + \alpha(r_i) n.$$

Так как $< V, V >= 1, < \partial_i V, V >= 0$, то

$$\omega(r_i) = < r_i, V >, \nabla_i V = r_i - \omega(r_i) V.$$

Имеем

$$\nabla_1 V^1 = 1 - g_{11} (V^1)^2, \nabla_1 V^2 = -g_{11} V^1 V^2, \quad (5)$$

$$\nabla_2 V^1 = -g_{22} V^1 V^2, \nabla_2 V^2 = 1 - g_{22} (V^2)^2.$$

Формулы (5) в силу(4) примут вид

$$\begin{gathered} \partial_t V^1 + \Gamma^1_{1s} V^s = 1 - (V^1)^2, \partial_t V^2 + \Gamma^2_{1s} V^s = -V^1 V^2, \\ \partial_v V^1 + \Gamma^1_{2s} V^s = -ch(t)^2, \partial_v V^2 + \Gamma^1_{2s} V^s = 1 - ch(t)^2 (V^2)^2. \end{gathered} \quad (6)$$

Система (6) имеет решение

$$\mathrm{V}^1(t, v) = \frac{\mathrm{e}^{2t} \mathrm{A1(v)} + \mathrm{A2(v)}}{\mathrm{e}^{2t} \mathrm{A1(v)} - \mathrm{A2(v)}},$$

$$\begin{gathered} \mathrm{V}^2(t, v) = 4 \frac{\mathrm{e}^{2t} \mathrm{C}_1 + C_2}{(\mathrm{e}^{\mathrm{e}} \mathrm{A1(v)} - \mathrm{e}^{-t} \mathrm{A2(v)})(\mathrm{e}^t + e^{-t})}, \\ \mathrm{A1(v)} = 2\mathrm{e}^v + e^{2v} C_1 - C_2, \\ A2(v) = 2\mathrm{e}^v - e^{2v} C_1 + C_2, C_1, C_2 = const. \end{gathered}$$

Потребуем, чтобы $< V, V >= 1$. Тогда $C_1 C_2 + 1 = 0$.

Введем обозначение $c_1 = \frac{1}{C_1}$. Имеем

$$V^1(t, v) = \frac{e^{2t} (e^v + c_1)^2 - (e^v - c_1)^2}{e^{2t} (e^v + c_1)^2 + (e^v - c_1)^2},$$

$$V^2(t, v) = 4 \frac{e^{2v} - c_1}{(e^{2t} (e^v + c_1)^2 + (e^v - c_1)^2)(e^t + e^{-t})}.$$

Построим поверхность $\overline{M}$, полагая $c_1 = e^2, c_1 = e$ (рис.2, рис.3).

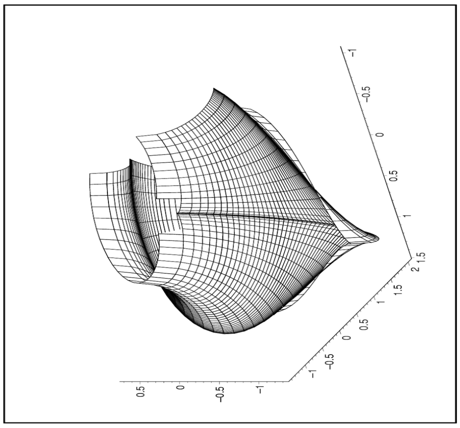

Рис.2: Преобразование Бианки катушки Миндинга, $c_1 = e^2$

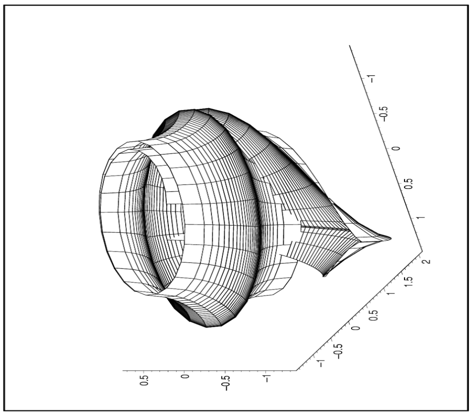

Рис.3: Преобразование Бианки катушки Миндинга, $c_1 = e$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kagan V.F. Fundamentals of the theory of surfaces in the tensor exposition. T. 2, M., L. (1948)
2. 2. Norden A.P. On the foundations of geometry. M., ГИТТЛ, (1956).
3. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Chalabi S.M., Analytical surfaces. M., Nauka, (2006).